成都市2018级高中毕业班第二次诊断性检测

数学(文科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷 (选择题,共60分)

一、选择题:(每小题5分,共60分)

1.A; 2.D; 3.C; 4.B; 5.D; 6.A; 7.B; 8.C; 9.C; 10.B; 11.C; 12.B.

第Ⅱ卷 (非选择题,共90分)

二、填空题:(每小题5分,共20分)

13. -1; 14. $\frac{1}{3}$; 15. $\frac{1}{2}$; 16. $b<c<a$.

三、解答题:(共70分)

17.解:(Ⅰ)由已知及正弦定理,得 $\sqrt{2}\sin B\cos C-\sin A\cos C=\sin C\cos A$. ……2分

$\therefore\sqrt{2}\sin B\cos C=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\sin(A+C)$. ……3分

$\because A+C=\pi-B$, $\therefore\sin(A+C)=\sin B$.

$\therefore\sqrt{2}\sin B\cos C=\sin B$. ……4分

又 $\because\sin B\neq 0$, $\therefore\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……5分

$\because C\in(0,\pi)$, $\therefore C=\frac{\pi}{4}$. ……6分

(Ⅱ)由已知及余弦定理,得 $ac\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b^2$. ……8分

化简,得 $a^2=2b^2$. ……9分

又 $\because a=\sqrt{2}$, $\therefore b=1$. ……10分

$\therefore\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$. ……12分

18.解:(Ⅰ)由题意,知 $\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5+6+7}{7}=4$, ……1分

$\bar{y}=\frac{2.90+3.30+3.60+4.40+4.80+5.20+5.90}{7}=4.30$, ……2分

$\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2=(1-4)^2+(2-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2+(6-4)^2+(7-4)^2=28$. ……3分

$\therefore r=\frac{14.00}{\sqrt{28\times 7.08}}=\frac{14.00}{\sqrt{198.24}}\approx\frac{14.00}{14.10}\approx 0.99$. ……5分

因为 y 与 x 的相关系数近似为0.99,所以 y 与 x 的线性相关程度相当大,从而可以用

线性回归模型拟合 y 与 x 的关系．　……6 分

（Ⅱ）∵ $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{14}{28}=0.5$，　……8 分

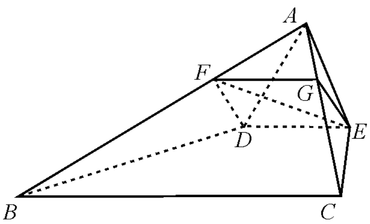
∴$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=4.3-0.5\times4=2.3$．　……9 分

∴ y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=0.5x+2.3$．　……10 分

将 $x=10$ 代入线性回归方程，得 $\hat{y}=0.5\times10+2.3=7.3$．

∴估算该种机械设备使用 10 年的失效费为 7.3 万元．　……12 分

19. 解：（Ⅰ）如图，在棱 AC 上取点 G 满足 $CG=2AG$，连接 EG，FG．　……1 分



∵ $BF=2AF$，∴$FG\parallel BC$ 且 $FG=\dfrac{1}{3}BC$．

又由题意，可得 $DE\parallel BC$ 且 $DE=\dfrac{1}{3}BC$．

∴ $DE=FG$ 且 $DE\parallel FG$．

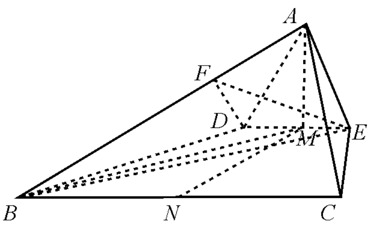
∴ 四边形 $DEGF$ 为平行四边形．　……3 分

∴$DF\parallel EG$．

又 ∵$DF\not\subset$ 平面 ACE，$EG\subset$ 平面 ACE，

∴$DF\parallel$ 平面 ACE．　……5 分

（Ⅱ）如图，分别取 DE，BC 的中点 M，N，连接 AM，MN，BM，BE．



由题意，知 $MN\perp BC$，$AM=2$，$MN=4$，$BN=3$．

在 Rt△BMN 中，$BM=\sqrt{BN^2+MN^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$．

在△ABM 中，∵$AB=\sqrt{29}$，

∴$AM^2+BM^2=2^2+5^2=29=AB^2$．

∴$AM\perp BM$．　……7 分

又 ∵$AM\perp DE$，$BM\cap DE=M$，BM，$DE\subset$ 平面 $BCED$，

∴$AM\perp$ 平面 $BCED$．　……8 分

∵ $BF=2AF$，

∴ 三棱锥 $A-DEF$ 的体积 $V_{A-DEF}=V_{F-ADE}=\dfrac{1}{3}V_{B-ADE}=\dfrac{1}{3}V_{A-BDE}$．　……10 分

又∵ $V_{A-BDE}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle BDE}\cdot AM=\dfrac{1}{6}DE\cdot MN\cdot AM=\dfrac{1}{6}\times2\times4\times2=\dfrac{8}{3}$，　……11 分

∴ 三棱锥 $A-DEF$ 的体积 $V_{A-DEF}=\dfrac{1}{3}V_{A-BDE}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{8}{3}=\dfrac{8}{9}$．　……12 分

20. 解：（Ⅰ）由已知，得 $a=2$．∴ 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$．　……1 分

∵ 椭圆 C 经过点 $A(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，∴ $\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4b^2}=1$，解得 $b^2=1$．　……3 分

∴ 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$．　……4 分

（Ⅱ）由题意，知直线 l 的斜率存在且不为 0，设直线 l 的方程为 $x=ty-1(t\neq 0)$，$D(x_1,y_1)$，$E(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}x=ty-1\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，消去 x，得 $(t^2+4)y^2-2ty-3=0$. ……5 分

$\because \Delta=4t^2+12(t^2+4)=16t^2+48>0$，

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{2t}{t^2+4}$，$y_1y_2=-\dfrac{3}{t^2+4}$. ……6 分

$\because$ F 为点 E 关于 x 轴的对称点，$\therefore F(x_2,-y_2)$.

$\therefore$ 直线 DF 的方程为 $y-y_1=\dfrac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$，

即 $y-y_1=\dfrac{y_1+y_2}{t(y_1-y_2)}(x-x_1)$. ……7 分

令 $y=0$，则 $x=x_1+\dfrac{-ty_1^2+ty_1y_2}{y_1+y_2}=\dfrac{(ty_1-1)(y_1+y_2)-ty_1^2+ty_1y_2}{y_1+y_2}$

$=\dfrac{2ty_1y_2-(y_1+y_2)}{y_1+y_2}=2t\cdot(-\dfrac{3}{2t})-1=-4$.

$\therefore G(-4,0)$. ……8 分

$\therefore |S_1-S_2|=\dfrac{1}{2}|BG|\cdot|y_1+y_2|=\dfrac{3}{2}|y_1+y_2|=\dfrac{3|t|}{t^2+4}$

$=\dfrac{3}{|t|+\dfrac{4}{|t|}}\leqslant\dfrac{3}{2\sqrt{|t|\cdot\dfrac{4}{|t|}}}=\dfrac{3}{4}$. ……11 分

$\therefore$ 当且仅当 $|t|=\dfrac{4}{|t|}$，即 $t=\pm 2$ 时，$|S_1-S_2|$ 取得最大值 $\dfrac{3}{4}$. ……12 分

21. 解：（Ⅰ）由已知，可得 $f'(x)=1-\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{a-1}{x}=\dfrac{(x+1)(x-a)}{x^2}(x>0)$. ……1 分

①若 $a\leqslant 0$，则当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，与 $f(x)$ 存在极值点矛盾； ……2 分

②若 $a>0$，则由 $f'(x)=0$ 得 $x=a$.

$\therefore$ 当 $x\in(0,a)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增.

$\therefore f(x)$ 存在唯一极小值点 $x=a$. …… 3 分

$\therefore f(a)=a+1-(a-1)\ln a-2=(a-1)(1-\ln a)=0$. ……4 分

$\therefore a=1$ 或 $a=\mathrm{e}$. ……5 分

（Ⅱ）①当 $a\leqslant 1$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上恒成立，$\therefore f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上单调递增.

$\because f(1)=a-1\leqslant 0$，$f(\mathrm{e})=\mathrm{e}+\dfrac{a}{\mathrm{e}}-a-1=(\mathrm{e}-1)(1-\dfrac{a}{\mathrm{e}})>0$，

$\therefore$ 由零点存在性定理，$f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上有 1 个零点； ……7 分

②当 $1<a<\mathrm{e}$ 时，

$\because$ 当 $x\in[1,a)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(a,\mathrm{e}]$ 时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $[1,a)$ 上单调递减，在 $(a,\mathrm{e}]$ 上单调递增.

$\therefore f(x)_{\min}=f(a)=(a-1)(1-\ln a)>0$,此时 $f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上无零点; ……9 分

③当 $a\geqslant \mathrm{e}$ 时,$\because f'(x)\leqslant 0$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上恒成立,$\therefore f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上单调递减.

$\because f(1)=a-1>0$, $f(\mathrm{e})=(\mathrm{e}-1)(1-\dfrac{a}{\mathrm{e}})\leqslant 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上有 1 个零点. ……11 分

综上,当 $1<a<\mathrm{e}$ 时,$f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上无零点;

当 $a\leqslant 1$ 或 $a\geqslant \mathrm{e}$ 时,$f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上有 1 个零点. ……12 分

22. 解:(Ⅰ)由曲线 C 的参数方程,得曲线 C 的普通方程为

$(x-1)^2+y^2=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$. ……1 分

由极坐标与直角坐标的互化公式 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,得

曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$, ……3 分

直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta-6=0$,即 $\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})=3$. ……5 分

(Ⅱ)设点 P 的极坐标为 (ρ_1,θ),点 Q 的极坐标为 (ρ_2,θ),其中 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$.

由(Ⅰ)知 $|OP|=\rho_1=\dfrac{6}{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}$, $|OQ|=\rho_2=2\cos\theta$. ……7 分

$$\therefore \frac{|OP|}{|OQ|}=\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{6}{2\cos^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}=\frac{6}{1+\cos 2\theta+\sqrt{3}\sin 2\theta}$$

$$=\frac{6}{1+2\sin(2\theta+\frac{\pi}{6})}.$$ ……9 分

$\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, $\therefore \dfrac{\pi}{6}<2\theta+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{7\pi}{6}$. $\therefore -\dfrac{1}{2}<\sin(2\theta+\dfrac{\pi}{6})\leqslant 1$.

$\therefore$ 当 $\sin(2\theta+\dfrac{\pi}{6})=1$,即 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 时,$\dfrac{|OP|}{|OQ|}$ 取得最小值 2. ……10 分

23. 解:(Ⅰ)当 $x<-1$ 时,$f(x)=-3x-3-2x+1=-5x-2>3$; ……1 分

当 $-1\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2}$ 时,$f(x)=3x+3-2x+1=x+4\in[3,\dfrac{9}{2}]$; ……2 分

当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时,$f(x)=3x+3+2x-1=5x+2>\dfrac{9}{2}$. ……3 分

综上,当 $x=-1$ 时,$f(x)_{\min}=3$,$\therefore m=3$. ……5 分

(Ⅱ)由(Ⅰ),即证 $(\dfrac{1}{a}+1+\dfrac{b^2}{a})(\dfrac{1}{b}+1+\dfrac{a^2}{b})\geqslant 9$.

$\because a,b\in(0,+\infty)$,

$\therefore \dfrac{1}{a}+1+\dfrac{b^2}{a}\geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{a^2}}$, $\dfrac{1}{b}+1+\dfrac{a^2}{b}\geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b^2}}$. ……7 分

$\therefore (\dfrac{1}{a}+1+\dfrac{b^2}{a})(\dfrac{1}{b}+1+\dfrac{a^2}{b})\geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{a^2}}\cdot 3\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b^2}}=9$. ……9 分

当且仅当 $\begin{cases}\dfrac{1}{a}=1=\dfrac{b^2}{a},\\ \dfrac{1}{b}=1=\dfrac{a^2}{b}\end{cases}$ 即 $a=b=1$ 时,等号成立. ……10 分